رویکردهای مختلف به آموزش مثلثات

(مقالهٔ ارائه شده در ۴۹امین کنفرانس ریاضی ایران- شهریور ۱۳۹۷، دانشگاه علم و صنعت ایران)

فرید حسینی، دبیر ریاضی (کردستان- مریوان- دبیرستان پسرانه شاهد)، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی
حمید فرهادی، دبیر ریاضی (کردستان- سروآباد- دبیرستان شهید کاظمی)، دانشجوی دکتری آنالیز تابعی دانشگاه کردستان

چکیده

با توجه به اهمیت و جایگاه مثلثات در برنامهٔ درسی و چالش‌هایی که در یادگیری و تدریس آن وجود دارد، ابتدا خلاصه‌ای از دو رویکرد متفاوت به مثلثات؛ یکی به‌عنوان نسبت‌ها و دیگری به‌عنوان تابع را معرفی می‌کنیم. سپس بر این مبنا، به چگونگی شروع مثلثات در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ متوسطه و در مورد خاص، ریاضیات پایهٔ دهم رشته‌های تجربی و ریاضی- فیزیک، می‌پردازیم.

کلید واژه‌ها: مثلثات، نسبت، تابع، دایرهٔ مثلثاتی، ریاضیات پایهٔ دهم (رشتهٔ تجربی، رشتهٔ ریاضی- فیزیک)

مقدمه

گهگاهی وقتی به قدرت مثلث فکر می‌کنم، خستگی‌ام در کار کردن با ریاضی، از بین می‌رود. این سه پاره‌خط، دارای چه قدرت جادویی هستند که تمام خطوط و دوایر و نقاط و ... که با این موجود سروکار دارند، به شکلی با هم رابطه‌ای زیبا دارند.
شهنی کرم زاده (۱۳۸۹)

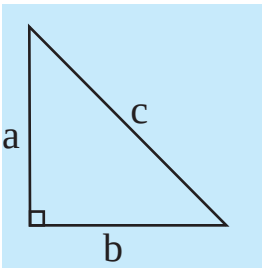
مثلثات، موضوع مهمی در برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان است و به دلیل نقش برجسته‌ای که همیشه در ایران داشته، به گفتهٔ رضائی (۱۳۹۳)، مطالعهٔ موضوعیِ سیر تحولات تاریخی مثلثات در برنامهٔ درسی، به نوعی می‌تواند بیانگر سیر تحولات برنامهٔ درسی ریاضی در ایران باشد. وی توضیح می‌دهد که در ابتدای فعالیت دارالفنون، نخستین کتاب مستقل مثلثات با عنوان «مثلثات مستقیمه‌الخطوط»، توسط عبدالغفار نجم‌الدوله (۱۲۹۰ هجری قمری) نگاشته شد. با وجود این، در سیر تحولات برنامهٔ درسی ریاضی، مثلثات به‌عنوان یک درس مستقل، جایگاه خود را از دست داد و در سال ۱۳۷۱، با تغییر نظام آموزش متوسطه در ایران، محتوای ریاضی کتاب‌های مجزا از جمله مثلثات؛ بدون از دست دادن هویتشان؛ در دورهٔ متوسطه، با هم تلفیق شدند.

مثلثات به صورت معناداری، استدلال‌های نموداری، هندسی و جبری را به هم پیوند می‌دهد. وجود اشتباهات مفهومی و بدفهمی‌ها، دانش‌آموزان را در حل مسئله‌های مثلثاتی، دچار مشکل نموده و باعث می‌شود حتی برای حل بعضی از مسائل معمولی ریاضی که دانش مورد نیاز را هم برای حل آن‌ها در اختیار دارند، به نتیجه نرسند و تلاش آن‌ها، با شکست مواجه گردد (علامه و گویا، ۱۳۹۳). ولی با وجود اهمیت

مثلثات و دشواری‌های نهفته در یادگیری آن، تحقیقات محدودی روی این مبحث انجام شـــده است (وبر، نات و اِویتس[1]، ۲۰۰۸). با توجه به جنبه‌های قابل تحقیق در این مبحث، در این مقاله ســـعی بر این اســـت که رویکردهای آموزشـــی به روابط مثلثاتی، یعنی مثلثات به‌عنوان نسبت‌ها و مثلثات به‌عنوان تابع، معرفی شوند و از این زاویهٔ نگاه، برنامهٔ درسی مثلثات دورهٔ متوسطه به‌خصوص کتاب‌های درســـی ریاضـــی (۱) پایهٔ دهم رشته‌های تجربی و ریاضی- فیزیک (امیری و همکاران، ۱۳۹۶)، بررسی شود. دلیل اســـتفادهٔ معادل از برنامهٔ درسی و کتاب درسی این است که در ایران، کتاب‌های درســـی در سطح «ملی» هســـتند و برای هر موضوع درســـی، یک و تنها یک کتاب درســـی تولید می‌شود. از طرف دیگر، هنوز راهنمای برنامهٔ درسی ریاضی، به تصویب نهایی نرسیده است. در نتیجه، می‌توان با اندکی تساهل و تسامح، از برنامهٔ درسی ریاضی و کتاب درسی ریاضی، به صورت معادل استفاده نمود.

روابط مثلثاتی به‌عنوان «نسبت»ها

در رویکرد «نســـبت‌ها» به مثلثات، با داشتن یک مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع مشـــخص و یک زاویه حاده، روابط مثلثاتی به عنوان نســـبت‌هایی از اضلاع، معرفی می‌شوند. اهمیت و کاربرد این رویکرد به حدی بوده که در روند شکل‌گیری مثلثات، تمام نسبت‌های اضلاعِ متمایز این آجر بنای چندضلعی‌ها، مسمّا و خالق شاخه زیبای مثلثات شده‌اند.



$(a,c) \rightarrow \sin A$ $\quad (b,c) \rightarrow \cos A$

$(a,b) \rightarrow \tan A$ $\quad (b,a) \rightarrow \cot anA$

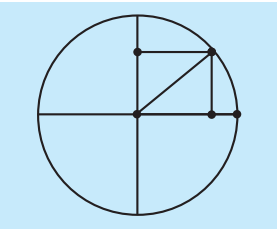
$(b,c) \rightarrow \sec A$ $\quad (c,a) \rightarrow \csc A$

در این رویکرد، دانش‌آموزان باید مثلث قائم‌الزاویه و ارتبـــاط آن را با روابط عددی درک کرده و در به کار بـــردن نمادها نیز مهارت پیدا کننـــد که این ترکیب، بســـیاری از آن‌ها را با مشکل مواجهه می‌کند. علامه و گویا (۱۳۹۳، به نقـــل از مور[2]، ۲۰۱۰)، اظهار کرده‌اند که به احتمال زیاد، مشـــکلات دانش‌آموزان در توسعه روابط مثلثاتی، چند وجهی بودن دانش لازم برای درک آن‌هاســـت. دانش‌آموزان با درک نسبت‌های مثلثاتی و کمک گرفتن از ماشین حســـاب، قادر خواهند بود تا طول اضلاع مجهول، زاویهٔ مجهول و در مسائل کلامی، با مدل‌سازیِ مسئله به کمک مثلث قائم‌الزاویه، مقادیر مجهول مسئله را بیابند. برای مثال، برآیند بردارها در فیزیک نیز به چنین درکـــی از توابع مثلثاتی نیازمند اســـت. اســـتانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای که توسط «شـــورای ملی معلمان ریاضـــی» (NCTM، ۲۰۰۰) تدوین شده، بر این نکته تأکید دارد که درک یک عمل، شامل توانایی تخمینِ نتیجه‌ای از آن عمل هم هست. به‌عنوان نمونه درک کسرها، مستلزم این است که آنان بدانند که ۷۸+۱۳۱۲، تقریباً برابر ۲ اســـت، زیرا مقدار تقریبی هر کسر، ۱ اســـت. البته درک «نسبت»ها به تنهایی، دانش‌آموزان را قادر نمی‌کند که مثلاً، sin۱۵ را تقریب بزنند. زیرا با این رویکرد، تنها زمانی می‌توان ایـــن مقدار را به دســـت آورد کـــه دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه°۱۵، داده شده باشد. از این گذشته، فقط با درک سینوس به‌عنوان نســـبت، دانش‌آموزان نمی‌توانند همـــه چیز را دربارهٔ روابـــط مثلثاتی درک کننـــد. برای مثال، آن‌ها بـــرای اینکه تعیین کنند در کدام ربع از صفحهٔ مختصات، سینوس صعودی است، یا اینکه بتوانند نمودار sin۲x را رســـم کنند، به دانش بیشـــتری در زمینه‌های دیگر، نیاز دارند. برای نمونه، بسیاری از مســـئله‌های مربوط به درس حسابان مانند تعیین مشتق sinx، تنها با درک نسبت‌های مثلثاتی، قابل انجام نیستند و دانش‌آموزان برای حل آن‌ها، لازم است که درک تابعی نیز از مثلثات، داشته باشند (وبر، نات و اِویتس، ۲۰۰۸). کندال و استیسی[3](۱۹۹۷) پس از بررســـی نقاط قوت و ضعـــف دو رویکرد به تدریس مثلثات؛ یکی به‌عنوان نســـبت و دیگری از روی دایرهٔ مثلثاتی، به این نتیجه رسیدند که رویکرد «نسبت»ها به مثلثات، درک جامعی از توابع سینوس و کسینوس در دانش‌آموزان، ایجاد نمی‌کند.

رویکرد تابعی به مثلثات (با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی)

در ایـــن رویکرد، دایرهٔ مثلثاتی در صفحهٔ دکارتی، رســـم یک زاویه با اندازه مشـــخص در دایرهٔ مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی به‌عنوان تابع، معرفی می‌شوند. به عبارتی، این رویکرد توابعی را معرفی می‌کند که اندازهٔ

زاویه را به‌عنوان «ورودی» در نظر می‌گیرد و آن را به «مقداری حقیقی»، می‌نگارد.



دانش‌آموزان برای محاسبهٔ مقادیر و تخمین توابع مثلثاتی، یک رویهٔ هندسی را یاد می‌گیرند و تابع بودن را در این فرایند، یاد می‌گیرند. تجربهٔ تدریس نویسندگان شاهدی بر این ادعاست که استفاده از این رویکرد، کمک می‌کند تا مشکلاتی که دانش‌آموزان در درک و فهم توابع مثلثاتی دارند، کاهش یابد و به تدریج، به فهم عمیق‌تر منجر شود.

با این حال، وبر، نات و اِویتس (۲۰۰۸)، شتاب‌زدگی را در استفاده از رویکرد دایره مثلثاتی، «روش‌های سنتی معرفی توابع مثلثاتی» می‌داند. همچنین، هولوول[۴] (۱۹۹۷، نقل شده در وبر، نات و اِویتس، ۲۰۰۸) نیز در بررسی چندین کتاب درسی جبر، مثلثات و هندسه دبیرستانی که بسیار مورد توجه بوده و بیش از بقیه برای تدریس انتخاب شده بودند، این نکته را آشکار ساخت که روابط مثلثاتی، ابتدا به‌عنوان «نسبت»، به دانش‌آموزان تدریس می‌شود (به‌عنوان نمونه در یک مثلثِ نام‌گذاری شده، $\sin\alpha$ به‌صورت $\frac{y}{r}$ یا به‌صورت «مقاب» بر «وتر» تعریف می‌شود) و از آنان خواسته می‌شود تا به کمک نسبت‌های مثلثاتی، تکلیف‌ها را انجام دهند و بعد از آن، انتظار می‌رود که بتوانند مسائل کلامی مثلثاتی را حل کنند. در کتاب‌های مورد اشاره، پس از آنکه دانش‌آموزان، این نسبت‌ها را آموختند، بعد مدل دایرهٔ مثلثاتی معرفی می‌شود. آنگاه در این مرحله، از دانش‌آموزان می‌خواهندکه انجام عملیات با یک رویهٔ خاص را برای یافتن سینوس و کسینوس زاویهٔ داده شده، «تجسم کنند» (مانند دوران به اندازهٔ r واحد روی دایرهٔ مثلثاتی، و یافتن عرض و طول نقطهٔ توقف). با این حال در آن کتاب‌ها، فرصت به کار بردن رویه‌ها برای دانش‌آموزان، ایجاد نشده است. تمرین‌ها هم به ندرت نیازمند به کارگیری یک رویه همراه با درک عملیات مثلثاتی است. در واقع حل بیشتر تمرین‌ها، تنها نیازمند دانستن مفهوم «نسبت» در عملیات مثلثاتی و به کاربردن تکنیک‌های جبری است (وبر، نات و اِویتس، ۲۰۰۸). علاوه بر این‌ها، محققان دیگری هم این نکته را خاطرنشان کرده‌اند که رویکردهای سنتی، بر درک روابط مثلثاتی به‌عنوان نسبت تأکید دارند و دانش‌آموزان را قادر به درک آن‌ها به‌عنوان تابع، نمی‌کنند (کندال و استیسی، ۱۹۹۷).

کندال و استیسی(۱۹۹۷) پس از بررسی نقاط قوت و ضعف دو رویکرد به تدریس مثلثات؛ یکی به‌عنوان نسبت و دیگری از روی دایرهٔ مثلثاتی، به این نتیجه رسیدند که رویکرد «نسبت»ها به مثلثات، درک جامعی از توابع سینوس و کسینوس در دانش‌آموزان، ایجاد نمی‌کند

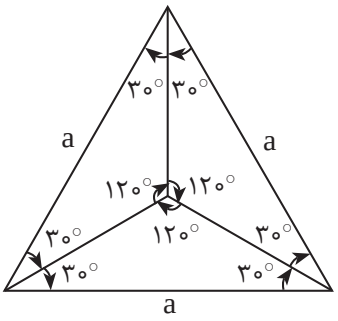
معرفی مثلثات در کتاب درسی ریاضی پایهٔ دهم (۱) رشته‌های تجربی و ریاضی- فیزیک

در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ دوم متوسطه و به‌طور مشخص کتاب ریاضی پایهٔ دهم رشته تجربی و رشتهٔ ریاضی- فیزیک (امیری و همکاران، ۱۳۹۶)، به‌صورت گذرا، این رویکرد هندسی ارائه شده است؛ همان پدیده‌ای که وبر، نات و اِویتس (۲۰۰۸)، آن را «روش‌های سنتی معرفی توابع مثلثاتی» نامیده‌اند.

در چینش محتوای کتاب ریاضی پایهٔ دهم، مثلثات در فصل دوم و تابع، در فصل پنجم آمده است که این تقدم، باعث شده که عملاً، مثلثات جایگزین اصطلاح رایج «توابع مثلثاتی» شده است. در حالی که اگر ابتدا فصل تابع می‌آمد و بعد فصل مثلثات قرار می‌گرفت، امکان معرفی و تجربه کردن دانش‌آموزان با مفهوم روابط مثلثاتی به معنای«توابع مثلثاتی»، بیشتر فراهم می‌شد. با پراختنِ بیشتر به رویکرد هندسی به مثلثات بر مبنای دایرهٔ مثلثاتی و ایجاد فرصتِ تجربه کردن عملی در کلاس درس برای دانش‌آموزان، از طریق انجام فعالیت‌های دقیق طراحی شده با مشارکت هم در گروه‌های کوچک، آنان می‌توانند «ارتباط و اتصال[۵]» بین مفاهیم ریاضی را به درستی درک کنند و در نتیجه، به فهم منسجم‌تری از مثلثات، برسند.

تال، توماس، گِری و سیمپسون[۶] (۲۰۰۰) در تحقیقات خود، به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان، بدون کسب ورزیدگی در به کار بردن یک رویه در عمل، به سختی می‌توانند تصوری از آن داشته باشند. در صورتی که پس از اولین به کارگیری، فهم دانش‌آموزان از آن رویه نیز، عمیق‌تر می‌شود و بدین سبب از نظر وی، در ارتقای درک مثلثاتی دانش‌آموزان، رویکرد هندسی موفق است. با وجود این، تال، توماس، گِری و سیمپسون (۲۰۰۰) بر این نکته تأکید کرده‌اند که اگرچه این رویکرد اثربخش است، ولی شروع آموزش مثلثات به کمک دایرهٔ مثلثاتی به تنهایی، تضمین‌کننده یادگیری عمیق و مفهومی مثلثات نیست. به باور آنان، مهم است که هم‌زمان، به دانش‌آموزان فرصت داده

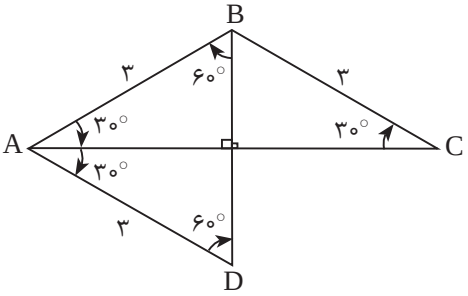
سه مثلث همنهشت با مثلث مفروض را طوری کنار هم می‌چینیم تا یک مثلث متساوی‌الاضلاع، تشکیل شود.



$$\frac{۱}{۲}a.a.\sin ۶۰ = ۳(\frac{۱}{۲}a.(۳).\sin ۳۰) \to a = ۳\sqrt{۳}$$

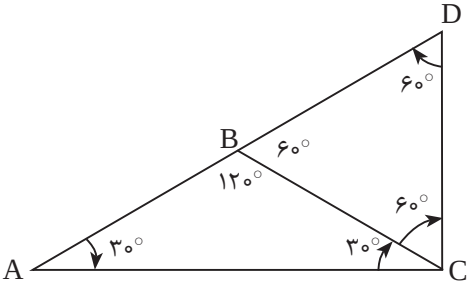
$$S = \frac{۱}{۲}a.(۳).\sin ۳۰ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

AC را عمود منصف BD فرض می‌گیریم. در نتیجه:



$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin ۶۰ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

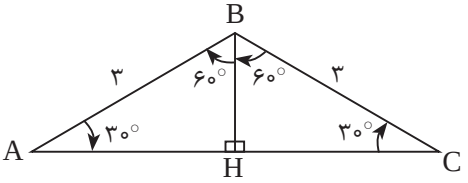
AB را امتداد داده تا عمود بر AC (در C) را در D قطع کند.



$$S_{ABC} = S_{ADC} - S_{BDC}$$

$$= \frac{۱}{۲}(۳)(۶)\sin ۶۰ - \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۹) = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

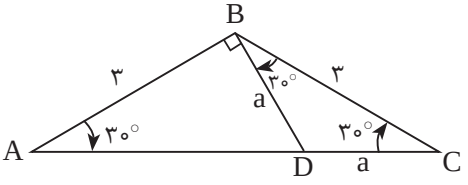
عمود BH را رسم می‌کنیم.



$$S_{ABC} = ۲S_{ABH} = (۳)(۳\sin ۳۰)(\sin ۶۰) = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

$$۲(\frac{۱}{۲})(۳\sin ۳۰)(۳\sin ۶۰)$$

زاویهٔ ۹۰ درجه را از زاویه B، جدا می‌کنیم.



$$a = ۳\tan ۳۰ = \sqrt{۳} \to S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC}$$

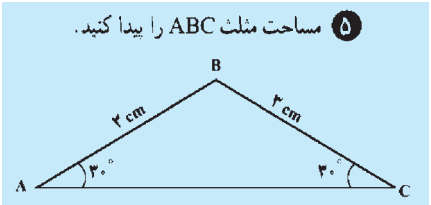
$$= \frac{۱}{۲}(۳)(\sqrt{۳}) + \frac{۱}{۲}(۳)(\sqrt{۳})(\frac{۱}{۲}) = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

شـــود که روابط مثلثاتی مانند سینوس و کسینوس را هم به صورت «نســـبت»، ببینند و به‌طور عملی، روش‌هـــای هندســـی را به کار ببرند و بـــا بازتاب بر مفاهیـــم مثلثاتی از هـــر دو جنبـــه و تلفیق آن‌ها، فهمشان عمیق‌تر شود. در حقیقت، یافتهٔ اصلی تال، توماس، گِری و سیمپسون (۲۰۰۰) و نتایج پژوهش وبر، نات و اِویتس (۲۰۰۸) مؤید این نظر اســـت که شروع آموزش مثلثات، با تلفیق دو رویکرد «نسبت» یا «هندســـی» و «تابع»، از نظر آموزشی، مناسب‌تر است. از نگاه وبر، نات و اِویتسر (۲۰۰۸)، جنبهٔ جذاب رویکرد هندسی این اســـت که اجرای آن، نیازی به تغییر جدی در روند تدریس و کلاس درس را ندارد. به عبارتی این رویکرد، اســـتفاده از تکنولوژی خاص یا آموزش‌های قبـــل از خدمت ویژه‌ای را نمی‌طلبد. در حالی که بالقوه، توانایی کمک به دانش‌آموزان را برای تعمیق درک مفاهیم مثلثاتی، دارد.

نویسندگان این مقاله در تدریس فصل مثلثات، نادیده گرفتن این یافته‌ها و تأکیدات پژوهشی را در تألیف کتاب ریاضی (۱) پایهٔ دهم رشته‌های تجربی و ریاضـــی- فیزیک، به وضوح دیده و جای خالی آن را حس کرده‌اند. به‌خصوص، طرح شیب خط و روابط مثلثاتـــی، امکان ایجاد درک منســـجمی از مفاهیم فصل مثلثات را برای دانش‌آموزان، دشـــوارتر کرده اســـت. همچنین در حال حاضر، مشکل ایجاد شده در پایهٔ دهم، در پایهٔ یازدهم، خود را نشـــان داده که نتایج آزمون‌ها نیز، گواهی بر این ادعاست.

سخن پایانی

این مقاله را با تحلیل تمرین ۵ کتاب ریاضی پایهٔ دهم که مربوط به رویکرد نســـبتی به مثلثات است، بـــه پایان می‌بریم. برای حل ایـــن تمرین، از رویکرد تلفیقی یعنی اســـتفاده از «نســـبت» و «تابع» برای شروع آموزش مثلثات، استفاده کرده‌ایم.



سؤال (۵)، صفحه ۳۶، (شکل (۱)):

ایدهٔ اولیهٔ قابل انتظار برای حل این مســـئله، به این صورت است:

$$\hat{B} = ۱۸۰ - (۳۰ + ۳۰) = ۱۲۰ \rightarrow$$

$$S = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\sin(۱۲۰) \rightarrow ???$$

ولی محاســـبهٔ sin۱۲۰، جزو انتظارات رویکرد «نســـبت»ی نیست و این امر، مشـــکل‌آفرین است. راه حل‌هایی را که جهت رفع مشـــکل، به اســـتناد یافته‌های پژوهشی و تجربه تدریسی خود پیش‌بینی کرده‌ایم، در **جدول صفحه قبل** نمایش داده‌ایم:

سپاسگزاری: از اســـتاد ارجمنـــد سرکار خانم دکتر ســـهیلا غلام‌آزاد که مقاله وبـــر، نات و اِویتس (۲۰۰۸) را به نویســـندگان معرفی کردند و مقاله را چند بـــار خوانده و نقد کردند و نکات مهمی را برای بهبود مقاله تذکر دادند، تشکر می‌کنیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Weber, Knott, & Evitts
2. Moore
3. Kendal & Stacey
4. Hollowell
5. Connection
6. Tall, Thomas, Gray& Simpson

منابع

1. NCTM. (2000). **principles and standards for school mathematics.** Reston: VA : The Author.
2. Weber, K.; Knott, L.; & Evitts, T. A. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. **National Council of Teachers of Mathematics**; 102 (2): 144- 150.
3. Kendal, M; & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. **Vinculum**, 34 (1): 4- 8.
4. Tall, D. O.; Thomas, G. D.; Gray, E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? **Journal of Mathematical Behavior**; 18 (2): 1- 19.
۵. امیـــری, حمیدرضـــا و همـــکاران. (۱۳۹۶). **ریاضی (۱) رشته‌های ریاضی- فیزیک و علوم تجربی**. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۶. رضائی, مانی. (۱۳۹۳). **بررسی کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ متوسطه از شروع آموزش رســـمی در ایران**. دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامهٔ درسی؛ ۲ (۳): ۷۱-۹۲. دانشگاه خوارزمی و انجمن مطالعات برنامه درسی ایران.
۷. شهنی کرمزاده، امیدعلی. (۱۳۸۹). **سخنرانی تحت عنوان «چرا باید هندسه به مدرســـه باز گردد»؟ یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران**؛ سمنان.
۸. علامـــه، مجتبی و گویـــا، زهـــرا. (۱۳۹۳). **بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مباحث مثلثات**. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۱۱۸. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.